INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN INGENIERÍA DE SUELOS: MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Marcelo Pardo[1]

Resumen

El uso de programas basados en herramientas matemáticas complejas es cada vez más común, sin embargo, son pocos los ingenieros civiles que conocen el modo en que dichos programas operan. El presente trabajo revisa los principios del método de las diferencias finitas, uno de los métodos más simples pero aún ampliamente utilizado.

Además de una breve revisión de los principios matemáticos del método de las diferencias finitas, el presente documento incluye ejemplos prácticos aplicados al flujo de agua en el suelo en condiciones no saturadas.

Palabras-clave: *modelación numérica; diferencias finitas; flujo en suelos; suelos parcialmente saturados.*

[1] M.Sc., Profesor de la Carrera de Ing. Civil de la Universidad Privada Boliviana, marcelo.pardo@hotmail.com

1 INTRODUCCIÓN

Los intentos para describir el comportamiento del suelo de una manera más precisa, han traído consigo un incremento en el grado de complejidad de los modelos matemáticos formulados y, por tanto, un incremento en el grado de dificultad de resolución de éstos.

Para lidiar con este problema, se han desarrollado varias herramientas informáticas, muchas de las cuales se han apoyado en diferentes herramientas matemáticas desarrolladas.

Los métodos numéricos más populares son: el método de las diferencias finitas, el método de los elementos finitos y el método de los elementos discretos.

Este artículo tiene por objetivo revisar los principios básicos del método de las diferencias finitas. Adicionalmente, se presenta una aplicación práctica de este método en la resolución de dos problemas de ingeniería de suelos.

2 FUNDAMENTO TEÓRICO DEL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Considérese una función *h(y)* que varía en el espacio como muestra la Figura 1. Los valores de la función en cualquier punto sobre la curva pueden ser obtenidos mediante las series de Taylor.

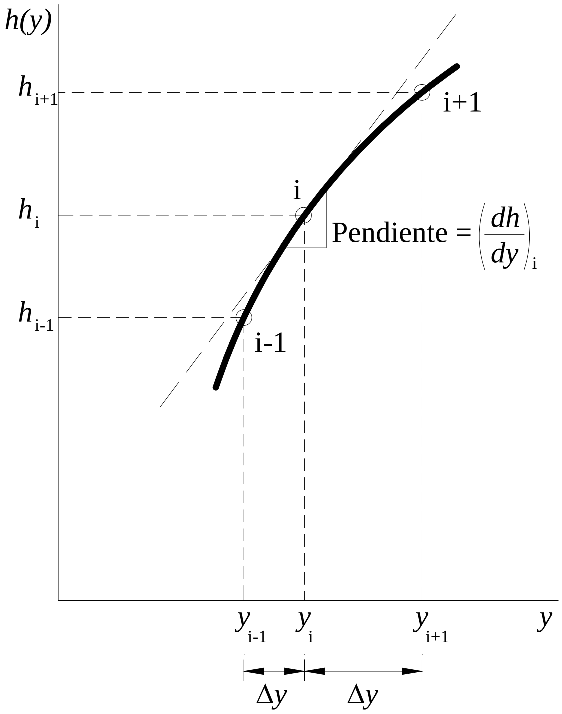

Figura 1. Definición de la función *h(y)*.

$$h_{i+1} = h_i + \Delta y\left(\frac{dh}{dy}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{d^2h}{dy^2}\right)_i + \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{d^3h}{dy^3}\right)_i + \ldots \quad (1)$$

$$h_{i-1} = h_i - \Delta y\left(\frac{dh}{dy}\right)_i + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{d^2h}{dy^2}\right)_i - \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{d^3h}{dy^3}\right)_i + \ldots \tag{2}$$

Donde *i-1*, *i*, *i+1* son tres puntos consecutivos que se encuentran separados por una distancia Δy.

Realizando la diferencia entre las ecuaciones (1) y (2), y despreciando las derivadas de orden superior, se puede derivar una ecuación incremental para la primera derivada de la función:

$$\left(\frac{dh}{dy}\right)_i = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta y} \tag{3}$$

De manera similar, realizando la suma de las ecuaciones (1) y (2), y despreciando las derivadas de orden superior, se puede tener una ecuación incremental para la segunda derivada del a función *h(y)*:

$$\left(\frac{d^2h}{dy^2}\right)_i = \frac{h_{i+1} + h_{i-1} - 2h_i}{\Delta y^2} \tag{4}$$

Las ecuaciones (3) y (4) pueden ser empleadas para resolver ecuaciones diferenciales de hasta segundo orden y para cualquiera de las direcciones del espacio.

Es importante notar, que al despreciar las derivadas de orden superior, se introduce en el sistema un pequeño margen de error, que en el caso de la ecuación (3) va desde una derivada de tercer orden y, en el caso de ecuación (4), va desde una derivada de cuarto orden. Sin embargo, al tratarse de pasos incrementales pequeños, la diferenciación de éstos puede tratarse como realmente despreciable.

3 INPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS EN PROBLEMAS DE LA INGENIERÍA DE SUELOS

Para definir la manera de implementar el método de las diferencias finitas a casos prácticos de la ingeniería de suelos, a continuación se presenta dos ejemplos.

Ejemplo 1: Flujo unidimensional del agua en un suelo parcialmente saturado

La ecuación de flujo unidimensional de agua en un suelo homogéneo es:

$$k_{wy}\frac{d^2h_w}{dy^2} + \frac{dk_{wy}}{dy}\frac{dh_1}{dy} = 0 \tag{5}$$

donde k_{wy} representa la función de variación del valor de conductividad hidráulica con la succión del suelo i.e. valor relacionado a la saturación; h_w el valor de carga hidráulica o altura total i.e. altura geométrica más altura piezométrica; dh_w/dy el cambio de la conductividad hidráulica en la dirección y; y dk_{wy}/dy el cambio de la conductividad hidráulica en la dirección y.

Con ayuda de las ecuaciones (3) y (4), la ecuación (5) puede ser rescrita en forma incremental de la siguiente manera:

$$k_{wy}\frac{h_{w(i+1)}+h_{w(i-1)}-2h_{w(i)}}{(\Delta y)^2}+\left(\frac{k_{wy(i+1)}-k_{wy(i-1)}}{2\Delta y}\right)\left(\frac{h_{w(i+1)}-h_{w(i-1)}}{2\Delta y}\right)=0 \qquad (6)$$

donde $k_{wy(i)}$, $k_{wy(i-1)}$ y $k_{wy(i)}$ son los coeficientes de conductividad hidráulica en la dirección y en los puntos *(i)*, *(i-1)* y *(i+1)*, respectivamente; $h_{w(i)}$, $h_{w(i-1)}$ y $h_{w(i+1)}$ son las alturas totales en los puntos *(i)*, *(i-1)* y *(i+1)*, respectivamente.

Si se asume un incremento Δy constante, se puede rescribir la ecuación (6) de las siguiente manera:

$$-\left(8k_{wy(i)}\right)\cdot h_{w(i)}+\left(4k_{wy(i)}+k_{wy(i+1)}-k_{wy(i-1)}\right)\cdot h_{w(i+1)}+\left(4k_{wy(i)}+k_{wy(i-1)}-k_{wy(i+1)}\right)\cdot h_{w(i-1)}=0 \qquad (7)$$

Ejemplo 2: Consolidación unidimensional en suelos parcialmente saturados

Se considera el caso de un suelo parcialmente saturado donde el flujo de agua y aire ocurre simultáneamente. Si se desprecia la variación espacial de los coeficientes de permeabilidad del aire y del agua, entonces se puede escribir las ecuaciones de consolidación unidimensional para la fase agua y para la fase aire de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u_w}{\partial t}=-C_w\frac{\partial u_a}{\partial t}+c_v^w\frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} \qquad (8)$$

donde u_w es la presión de agua en los poros, u_a es la presión de aire en los poros, C_w es una constante asociada a los coeficientes de deformación del suelo, c_v^w es el coeficiente de consolidación con respecto a la fase agua i.e. $k_w / (\rho_w \cdot g \cdot m_2^w$, t es el tiempo e y es la dirección de flujo;

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=-C_a\frac{\partial u_w}{\partial t}+c_v^a\frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} \qquad (9)$$

donde C_a es una constante asociada a los coeficientes de deformación del suelo y c_v^a es el coeficiente de consolidación con respecto a la fase aire.

Las ecuaciones (8) y (9) pueden ser escritas en forma incremental de la siguiente manera:

$$\frac{u_{w(i,j+1)}-u_{w(i,j)}}{\Delta t}=-C_w\frac{u_{a(i,j+1)}-u_{a(i,j)}}{\Delta t}+c_v^w\frac{u_{w(i+1,j)}-2u_{w(i,j)}+u_{w(i-1,j)}}{\Delta y^2} \qquad (10)$$

$$\frac{u_{a(i,j+1)} - u_{a(i,j)}}{\Delta t} = -C_a \frac{u_{w(i,j+1)} - u_{w(i,j)}}{\Delta t} + c_v^a \frac{u_{a(i+1,j)} - 2u_{a(i,j)} + u_{a(i-1,j)}}{\Delta y^2} \tag{11}$$

donde *i* representa el incremento en la dirección *y* y *j* el incremento en el tiempo.

Si se multiplica la ecuación (11) por $-C_w$ y se la reemplaza en la ecuación (10), se obtiene la relación:

$$\frac{u_{w(i,j+1)} - u_{w(i,j)}}{\Delta t} = C_a C_w \frac{u_{w(i,j+1)} - u_{w(i,j)}}{\Delta t} - c_v^a C_w \frac{u_{a(i+1,j)} - 2u_{a(i,j)} + u_{a(i-1,j)}}{\Delta y^2} + c_v^w \frac{u_{w(i+1,j)} - 2u_{w(i,j)} + u_{w(i-1,j)}}{\Delta y^2} \tag{12}$$

Ordenando la ecuación (12) se puede obtener una relación para determinar la presión de agua en los poros para un tiempo *j+1*,

$$u_{w(i,j+1)} = u_{w(i,j)} + \frac{\beta_w g_1^w}{1 - C_a C_w} - \left(\frac{C_w}{1 - C_a C_w}\right) \cdot \beta_a f_1^a \tag{13}$$

donde $\beta_w = c_v^w \Delta t/\Delta y^2$, $\beta_a = c_v^a \Delta t/\Delta y^2$, $g_1^w = u_{w(i+1,j)} - 2u_{w(i,j)} + u_{w(i-1,j)}$ y $f_1^a = u_{a(i+1,j)} - 2u_{a(i,j)} + u_{a(i-1,j)}$.

De igual manera, se puede demostrar la siguiente relación:

$$u_{a(i,j+1)} = u_{a(i,j)} + \frac{\beta_a f_1^a}{1 - C_a C_w} - \left(\frac{C_a}{1 - C_a C_w}\right) \cdot \beta_w g_1^w \tag{14}$$

4 APLICACIÓN PRÁCTICA

Con la finalidad de mostrar el empleo del método de diferencias finitas en casos prácticos de la ingeniería de suelos, a continuación se presenta un ejemplo de resolución en un caso práctico utilizando este método.

a. Flujo unidimensional en un suelo parcialmente saturado

Se considera un flujo constante en un suelo parcialmente saturado producido por una evaporación constante en la superficie. El nivel freático está ubicado a una profundidad h_{gn} de la superficie. Se requiere determinar la distribución de presiones en la columna de suelo por encima el nivel freático, ver Figura 2.

Si se realiza la instalación de un tensiómetro en la superficie para efectuar la medición de la succión matriz i.e. presión negativa de agua en los poros, se puede determinar el valor del gradiente hidráulico en la columna de suelo.

Dado que el gradiente hidráulico para la columna de suelo es constante, se puede emplear la ecuación (7) para la estimación de las alturas totales y, por tanto, de las alturas piezométricas a lo largo de toda la columna.

$$-\left(8k_{wy(i)}\right)\cdot h_{w(i)}+\left(4k_{wy(i)}+k_{wy(i+1)}-k_{wy(i-1)}\right)\cdot h_{w(i+1)}+\left(4k_{wy(i)}+k_{wy(i-1)}-k_{wy(i+1)}\right)\cdot h_{w(i-1)}=0 \quad (7)$$

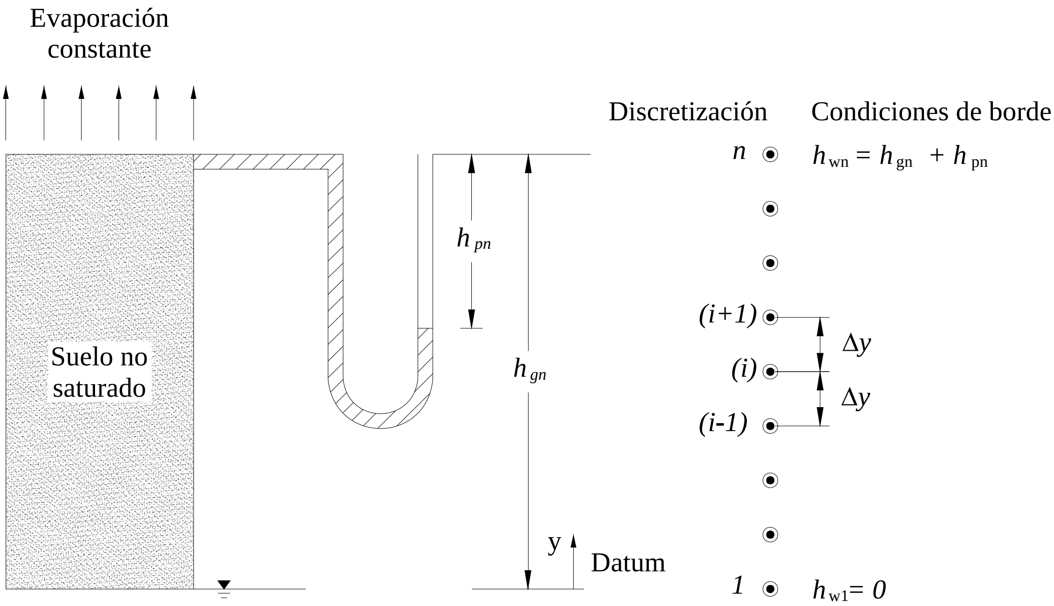

Figura 2 - Flujo unidimensional en un suelo parcialmente saturado para un gradiente hidráulico constante (Fredlund & Rahardjo, 1993).

Una vez definida la ecuación que describe el fenómeno en el suelo, se procede a definir *n* puntos ubicados dentro la columna de suelo, separados por una distancia constante de Δy, ver Figura 2.

Tomando la ubicación del nivel freático como nivel de referencia, se determina que la altura total para el Punto 1, ubicado en la parte inferior de la columna es cero, Figura 2. De la misma manera, de la suma de las componentes geométrica y piezométrica, se puede determinar que la altura total del Punto *n* de la columna, ubicado en la parte superior, es de $h_{gn} + h_{pn}$, Figura 2.

Si se escribe la ecuación (7) para los *n-2* puntos internos de la columna de suelo, se obtiene un sistema de *n-2* ecuaciones con *n* variables i.e. las alturas totales en cada uno de los *n* puntos. Dado que dos de estas variables ya han sido determinadas, h_{wl} y h_{wn}, se tiene un sistema de *n-2* ecuaciones con *n-2* variables.

Por otro lado, en vista de que el valor de conductividad hidráulica del suelo es una función de la succión del suelo i.e. presión negativa de agua en los poros, éste será una incógnita adicional para cada punto. A este tipo de sistemas se los conoce como no lineales.

Para resolver este inconveniente, se puede asumir inicialmente el valor de conductividad hidráulica saturado para todos los puntos. Una vez asumido este valor y solucionado el sistema de *n*-2 ecuaciones, se tiene, mediante los valores de succión obtenidos, los nuevos valores de conductividad hidráulica. Este proceso puede ser repetido hasta que se alcance un equilibrio en el sistema, ver Figura 3.

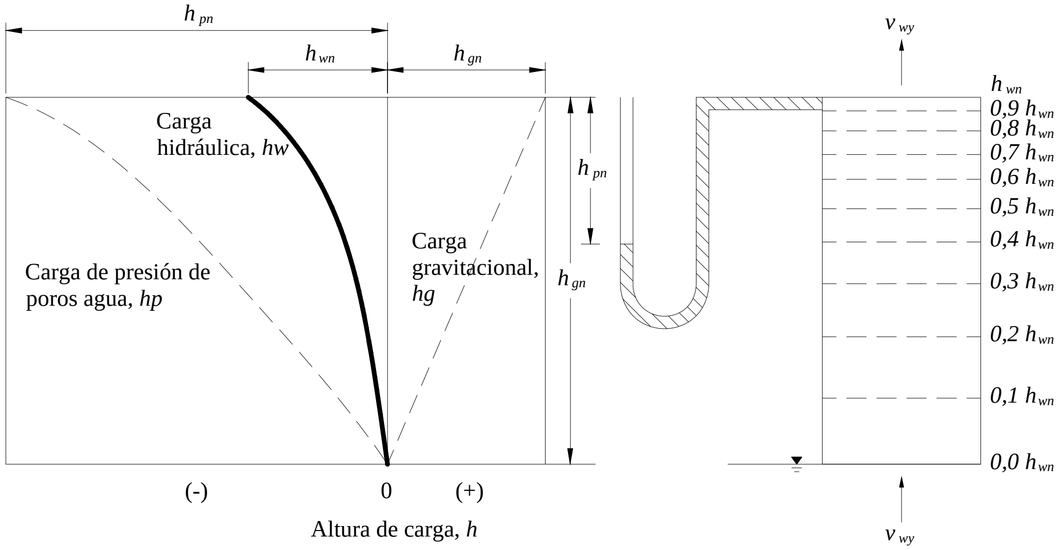

Figura 3 - Evaporación estable a través de una columna de suelo parcialmente saturado (Fredlund & Rahardjo, 1993).

b. Infiltración en un suelo parcialmente saturado

La Figura 4 presenta el caso de un suelo no saturado sometido a una infiltración constante, q_{wy}. Nuevamente, se requiere la distribución de presiones a lo largo de la columna de suelo.

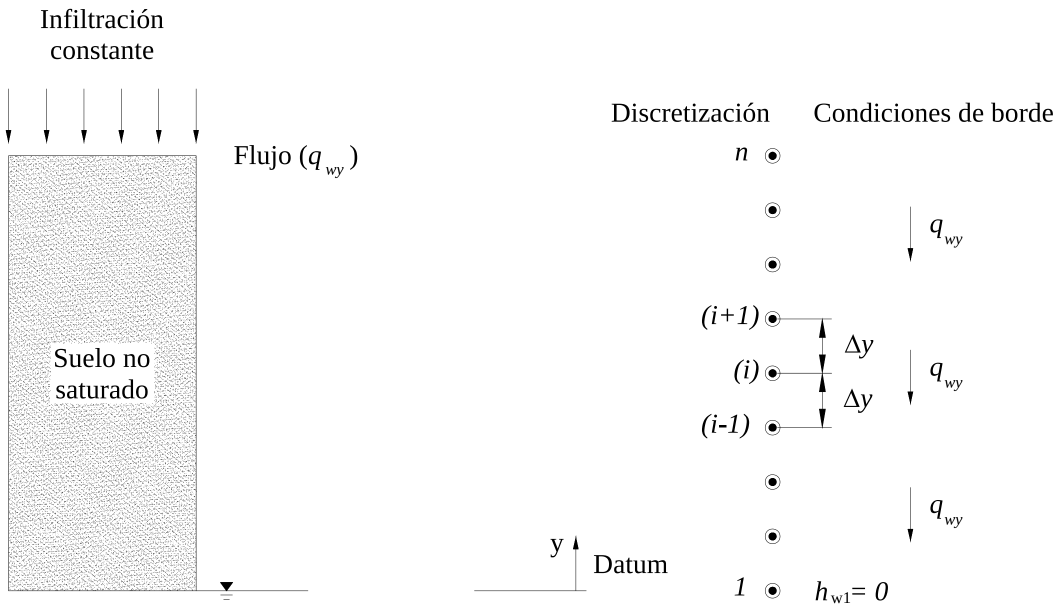

Figura 4 - Flujo unidimensional enun suelo parcialmente saturado para una condición de flujo constante (Fredlund & Rahardjo, 1993).

La determinación de la distribución de presiones puede ser realizada como en el anterior ejemplo mediante la ecuación (7). Sin embargo, en este caso sólo se cuenta con el valor de altura total en el Punto 1 i.e. $h_{w1}=0$, y no así en el Punto *n*.

Un dato adicional con que se cuenta en este caso, es el caudal de infiltración, q_{wy}, el cual es constante a través de toda la columna de suelo. Se puede expresar el caudal q_{wy} en función de dos alturas totales correspondientes a dos puntos ubicados dentro la columna de suelo:

$$q_{wy} = -k_{wy(i)} \frac{h_{w(i+1)} - h_{w(i-1)}}{2\Delta y} A \tag{15}$$

donde q_{wy} es el caudal de infiltración en la columna de suelo, A es el área de la columna de suelo. Esta ecuación se la puede reescribir como:

$$h_{w(i+1)} = h_{w(i+1)} - \frac{2\Delta y}{A \cdot k_{wy(i)}} q_{wy} \tag{16}$$

Reemplazando la ecuación (16) en la ecuación (7) se tiene:

$$\begin{aligned} &-\left(8k_{wy(i)}\right) \cdot h_{w(i)} + \left(4k_{wy(i)} + k_{wy(i+1)} - k_{wy(i-1)}\right) \cdot \left(h_{w(i-1)} - \frac{2\Delta y}{A \cdot k_{wy(i)}} q_{wy} \right) \\ &+ \left(4k_{wy(i)} + k_{wy(i-1)} - k_{wy(i+1)}\right) \cdot h_{w(i-1)} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

de donde se tiene:

$$h_{w(i)} = h_{w(i-1)} - \left(\frac{4k_{wy(i)} + k_{wy(i-1)} - k_{wy(i+1)}}{8k_{wy(i)}^2} \right) \cdot \frac{2\Delta y}{A} q_{wy} \tag{18}$$

A diferencia del ejemplo anterior, en éste se ha logrado una ecuación explícita. Es decir, cada punto *i* puede ser calculado a partir de un punto *i-1*.

En el anterior caso i.e. ecuación implícita, este proceso no puede ser llevado a cabo y, en cambio, se tiene que resolver un sistema de *n-2* ecuaciones con *n-2* incógnitas.

Algo similar al anterior caso es que el sistema es no lineal, ya que tanto los valores de succión como de permeabilidad, son inicialmente desconocidos, por lo que debe ser calculados mediante un proceso de iteración, ver Figura 5.

Es importante notar que la ecuación (18) puede ser adaptada para el caso de un suelo saturado homogéneo, simplemente tomando el valor de permeabilidad saturada, k_s, para toda la columna de suelo. Es decir:

$$h_{w(i)} = h_{w(i-1)} - \cdot \frac{\Delta y}{A} q_{wy} \tag{19}$$

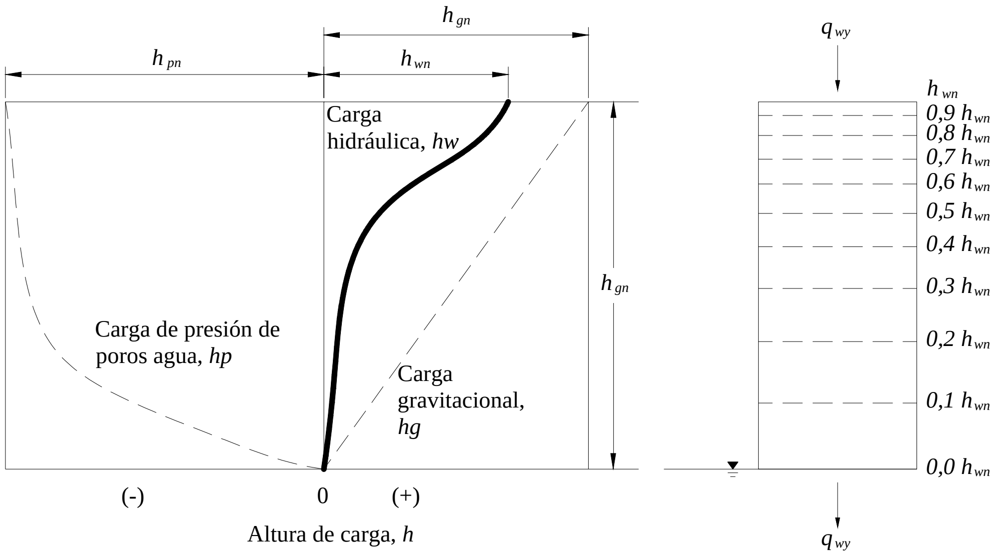

Figura 5 - Infiltración estable a través de una columna de suelo parcialmente saturado (Fredlund & Rahardjo, 1993).

5 CONCLUSIONES

Se ha realizado una revisión bibliográfica del principio teórico de las diferencias finitas.

Se ha analizado la implementación de este método en dos ecuaciones de la mecánica de suelos.

Finalmente, se han revisado dos casos prácticos de la ingeniería de suelos, donde se han contemplado la implementación del método y la metodología para resolver el sistema de ecuaciones obtenido.

6 REFERENCIAS

FREDLUND, D. y RAHARDJO G. (1993). **Soil Mechanics for Unsaturated Soils**. USA: John Wiley & Sons.